

Extension d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte

Cyrille Dadi ⁽¹⁾ et Hassimiou Diallo ⁽²⁾

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,
Ecole Normale Supérieure, Université de Cocody
08 BP 10 ABIDJAN 08

email⁽¹⁾: cyrdadi@yahoo.fr, email⁽²⁾: diallomh@yahoo.fr

February 2, 2008

Abstract

The purpose of this paper is to show that any extension of a minimal Lie foliation on a compact manifold is a transversely Riemannian $\frac{G}{H}$ -foliation with trivial normal bundle.

This result permits to classify the extensions of a minimal Lie foliation on a compact manifold from Lie subgroups of its Lie group.

Dans tout ce qui suit les objets sont C^∞ , la variété de base \mathcal{M} et les feuilletages considérés sont, si nécessaire, pris orientables, et le groupe de Lie G des feuilletages de Lie sera supposé connexe et simplement connexe.

1 Introduction

On sait qu'un feuilletage de Lie d'une variété compacte et connexe est, entre autre, un feuilletage transversalement - riemannien, parallélisable, homogène, à fibré normal trivial, défini par une 1 - forme à valeurs dans une algèbre de Lie.

Il s'agit ici, étant donné un G -feuilletage de Lie *minimal* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ d'une variété compacte et connexe, de voir comment évoluent ces propriétés à travers des feuilletages \mathcal{F}' *extensions* de \mathcal{F} (i.e. des feuilletages qui sont tels que $T\mathcal{F} \subsetneq T\mathcal{F}'$). A défaut de préserver ces propriétés sus-citées, peut-on expliciter une condition nécessaire et suffisante pour qu'une extension admette comme structure transverse l'une des structures transverses de \mathcal{F} ?

L'étude fait apparaître clairement que le *groupe de Lie* G contient toutes les *informations* concernant l'existence et la nature d'une telle extension.

De façon précise, on montre que

- il y a une correspondance biunivoque entre les sous-algèbres de Lie de $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$ (ou si l'on préfère entre les sous-groupes de Lie connexes de G) et les extensions de \mathcal{F} ,

- une extension de \mathcal{F} est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage (voir définitions) transversalement riemannien , à fibré normal trivial , défini par une 1- forme vectorielle.

Ce qui permet d'obtenir une caractérisation et par suite une classification des extensions de \mathcal{F} .

Une extension \mathcal{F}' d'un feuilletage de Lie minimal $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ d'une variété compacte et connexe est transversalement homogène (resp. de Lie) si et seulement si le sous-groupe de Lie connexe correspondant est fermé (resp. normal).

Il en résulte que

- toute extension d'un feuilletage de Lie (resp.d'un feuilletage linéaire) minimal du tore est un feuilletage de Lie (resp. un feuilletage linéaire) et
- si un feuilletage de Lie d'une variété compacte est dense dans une de ses extensions alors cette extension est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ - feuilletage transversalement riemannien à fibré normal trivial.

2 Généralités

Notation 2.1 Dans ce qui suit \mathcal{G} est une algèbre de Lie de dimension q , de groupe de Lie connexe et simplement connexe G , \mathcal{H} une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} de codimension q' , (e_1, \dots, e_q) une base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} telle que $(e_{q'+1}, \dots, e_q)$ soit une base de \mathcal{H} ; on pose $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^q K_{ij}^k e_k$, les K_{ij}^k étant les constantes de structure de \mathcal{G} . Ainsi si ω est une 1-forme sur une variété \mathcal{M} à valeurs dans \mathcal{G} , relativement à cette base , on a $\omega = \sum_{i=1}^q \omega^i \otimes e_i$ qu'on note encore $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^q)$; par exemple si θ est la 1-forme canonique de G , on écrira $\theta = \sum_{i=1}^q \theta^i \otimes e_i$ ou $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^q)$.

Précisons pour la suite qu'un sous-groupe de Lie étant vu comme un sous-groupe *immergé* d'un groupe de Lie, n'est alors ni nécessairement *plongé*, ni nécessairement *fermé*.

Dfinition 2.2 Une extension d'un feuilletage $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ de codimension q est un feuilletage $(\mathcal{M}, \mathcal{F}')$ de codimension q' tel que $0 < q' < q$ et $T\mathcal{F} \subset T\mathcal{F}'$ (on notera $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$).

Une extension d'un feuilletage sera dite de Lie, resp.transversalement homogène, resp. linéaire si cette extension est dans chacun des cas un feuilletage de ce type.

La notion de $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage , que nous allons définir maintenant, a été introduite par El Kacimi dans [5].

Dfinition 2.3 Avec les notations ci-dessus , soient \mathcal{G} une algèbre de Lie , \mathcal{H} une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} et $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^q)$ une 1-forme sur une variété connexe \mathcal{M} à valeurs dans \mathcal{G} . Supposons que ω vérifie la condition de Maurer-Cartan $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$, i.e.

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^q K_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j \quad (*)$$

et $\omega^1, \dots, \omega^{q'}$ sont linéairement indépendantes en tout point de \mathcal{M} . Alors le système différentiel $\omega^1 = \dots = \omega^q = 0$ est intégrable et définit un feuilletage \mathcal{F} de codimension q' qu'on appellera un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage défini par la 1-forme ω .

Si la 1-forme ω est la 1-forme de Fédida définissant un feuilletage de Lie \mathcal{F}_ω , on dira que \mathcal{F} est le $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage associé au feuilletage de Lie \mathcal{F}_ω .

Exemple 2.4 Si $M = G$, alors $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^q)$ définit un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ dont les feuilles sont les classes à gauche de H .

On notera que si le sous-groupe H est fermé, ce $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage n'est riemannien que si et seulement si , les actions à droite de H sont des isométries pour la structure métrique invariante à gauche de groupe de Lie de G .

Ainisi, pour $G = Aff(\mathbb{R}^q) = GL(\mathbb{R}^q) \ltimes \mathbb{R}^q$, les seules actions à droite invariantes étant les éléments du groupe orthogonal $O(q, \mathbb{R})$, alors le feuilletage $\mathcal{F}_{Aff(\mathbb{R}^q), GL(\mathbb{R}^q)}$ n'est riemannien pour aucune valeur de $q \geq 1$ puisque $O(q, \mathbb{R}) \subsetneq GL(\mathbb{R}^q)$.

La proposition qui suit , d'après [5], s'établit comme pour les feuilletages de Lie ou les feuilletages transversalement homogènes([1], [6]).

Proposition 2.5 Soit \mathcal{F} un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage sur une variété \mathcal{M} définie par une 1-forme ω et soit $\tilde{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ le feuilletage relevé de \mathcal{F} sur le revêtement universel $\tilde{\mathcal{M}}$ de \mathcal{M} . Alors, il existe une application $\mathcal{D}: \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow G$ et une représentation $\rho: \pi_1(\mathcal{M}) \rightarrow G$ telles que

- (i) \mathcal{D} est $\pi_1(\mathcal{M})$ -équivariant, i.e. $\mathcal{D}(\gamma.\tilde{x}) = \rho(\gamma).\mathcal{D}(\tilde{x})$ pour tous $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{M}}$ et $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$, et
- (ii) $p^*\omega = \mathcal{D}^*\theta$, i.e. $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^*\mathcal{F}_{G,H}$.

On dira que \mathcal{D} est une application développante sur $\tilde{\mathcal{M}}$ du $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage \mathcal{F} .

Remarque 2.6 Réciproquement si l'on se donne une représentation $\rho: \pi_1(\mathcal{M}) \rightarrow G$ et une submersion $\pi_1(\mathcal{M})$ -équivariant \mathcal{D} de $\tilde{\mathcal{M}}$ sur G . Alors le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^*\mathcal{F}_{G,H}$ passe au quotient et définit sur \mathcal{M} un feuilletage \mathcal{F} qui est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage.

En particulier si \mathcal{D} est une développante de Fédida d'un feuilletage de Lie $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, alors \mathcal{F} est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage extension de $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

En plus si le sous-groupe H est fermé, cette extension est un feuilletage riemannien si et seulement si le feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ est riemannien.

Exemple 2.7

Avec les notations précédentes, si $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ est l'un des deux flots "propres" du tore hyperbolique \mathbb{T}_A^3 [3], le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{T}_A^3} & \longrightarrow & \mathcal{Aff}^+(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* \ltimes \mathbb{R} \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R} = \frac{\mathcal{Aff}^+(\mathbb{R})}{\mathbb{R}_+^*} \\ \downarrow & & \\ \mathbb{T}_A^3 & & \end{array}$$

montre que le $\frac{\mathcal{Aff}^+(\mathbb{R})}{\mathbb{R}_+^*}$ – feuilletage \mathcal{F} – extension de ce flot de Lie (qui est *non minimal* [3]) est un feuilletage non riemannien.

Rappelons, pour terminer cette partie, qu'un groupe G est dit *virtuellement résoluble* s'il contient un sous-groupe résoluble d'indice fini (c'est le cas des groupes résolubles, nilpotents et abéliens). Et le théorème suivant dû à A.Haefliger [8] nous sera utile pour la suite.

Thorme 2.8 *Un feuilletage riemannien à feuilles denses sur une variété riemannienne complète \mathcal{M} à groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{M})$ virtuellement résoluble est transversalement homogène.*

3 Extension d'un feuilletage de Lie minimal

La propriété suivante montre la rigidité des extensions d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte.

Proposition 3.1 *Si \mathcal{F}' est une extension d'un feuilletage de Lie minimal $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ d'une variété compacte connexe, alors tout champ global \mathcal{F} –feuilleté transverse, tangent à \mathcal{F}' en un point, est tangent à \mathcal{F}' .*

Preuve.

1) Commençons par montrer que tout champ global feuilleté transverse d'un G – feuilletage de Lie minimal $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ d'une variété compacte connexe nul en un point est identiquement nul. En effet, dans ces conditions, on sait que l'algèbre de Lie structurale $\ell(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ de \mathcal{F} et l'algèbre de Lie de G sont isomorphes de dimension la codimension de \mathcal{F} . Ensuite, le feuilletage de Lie \mathcal{F} étant à feuilles denses, si (Y_1, \dots, Y_q) est un parallélisme de Lie transverse de \mathcal{F} , et si on considère une métrique quasi-fibrée de \mathcal{F} , alors

- l'application "évaluation en x ", notée ev_x de $\ell(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ dans $\nu_x(\mathcal{F}) \cong (T_x\mathcal{F})^\perp$, définie par $ev_x(X) = X(x)$, réalise un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels entre $\ell(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ et $(T_x\mathcal{F})^\perp$,

- pour tout $Z \in \ell(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, Z s'écrit :

$$Z = \sum_{i=1}^q \xi^i Y_i$$

où les fonctions \mathcal{F} –basiques ξ^i sont en fait des constantes réelles. Ceci dit, si Z s'annule en un point donné, les ξ^i sont tous nuls et par conséquent $Z = 0$.

2) Considérons maintenant un champ $Z \in \ell(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ tel que pour un point x_0 donné, $Z(x_0) \in T_{x_0}\mathcal{F}'$. Suivant la décomposition

$$(T\mathcal{F})^\perp = (T\mathcal{F})^\perp \cap T\mathcal{F}' \oplus (T\mathcal{F})^\perp \cap (T\mathcal{F}')^\perp$$

Z s'écrit $Z = Z_1 + Z_2$, où Z_1 et Z_2 sont des sections globales respectives des sous-fibrés $(T\mathcal{F})^\perp \cap T\mathcal{F}'$ et $(T\mathcal{F})^\perp \cap (T\mathcal{F}')^\perp = (T\mathcal{F}')^\perp$ du fibré orthogonal $(T\mathcal{F})^\perp$ de \mathcal{F} . Comme $Z(x_0) \in (T_{x_0}\mathcal{F})^\perp \cap T_{x_0}\mathcal{F}'$, alors $Z_2(x_0) = 0$. Ce qui implique d'après le 1) que Z_2 est identiquement nul, donc $Z = Z_1$, i.e. Z est tangent à \mathcal{F}' . ■

Ceci étant, le théorème suivant, qui est le résultat principal de ce travail, détermine et classe les extensions d'un G -feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte et connexe.

Thorme 3.2 *Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ un G -feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte connexe, d'algèbre de Lie \mathcal{G} .*

Alors:

1- *Il y a une correspondance biunivoque entre les sous-groupes de Lie connexes de G et les extensions de \mathcal{F} .*

2- *Une extension de \mathcal{F} est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage transversalement riemannien à fibré normal trivial, définie par une 1- forme vectorielle.*

3- *Une extension de \mathcal{F} est transversalement homogène(resp. de Lie) si et seulement si le sous-groupe de Lie de G correspondant est un sous-groupe fermé (resp. un sous-groupe normal) dans G .*

Preuve. Etant donné un G -feuilletage de Lie minimal $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ de codimension $q > 0$ d'une variété compacte connexe, d'algèbre de Lie \mathcal{G} ,

1. Soit \mathcal{F}' une extension de \mathcal{F} , de codimension q' . Considérons $\tilde{\mathcal{H}}$ l'ensemble des champs \mathcal{F} –feuillets tangents à \mathcal{F}' ; $\tilde{\mathcal{H}}$ est visiblement une sous-algèbre de l'algèbre de Lie structurale $l(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ de \mathcal{F} . Pour déterminer la dimension de cette sous-algèbre, notons, d'après ce qui précède que

- pour tout $x \in \mathcal{M}$, et pour tout $X \in \tilde{\mathcal{H}}$, $ev_x(X) \in (T_x\mathcal{F})^\perp \cap T_x\mathcal{F}'$,
- pour tout $u \in (T_x\mathcal{F})^\perp \cap T_x\mathcal{F}'$, la proposition 3.1 précédente permet de voir que le champ $X_u = ev_x^{-1}(u)$ est dans $\tilde{\mathcal{H}}$.

Au total, la restriction à $\tilde{\mathcal{H}}$ de ev_x est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\tilde{\mathcal{H}}$ sur $ev_x(\tilde{\mathcal{H}}) = (T_x\mathcal{F})^\perp \cap T_x\mathcal{F}'$; ce qui assure par la formule des dimensions que

$$\begin{aligned} \dim \tilde{\mathcal{H}} &= \dim(T_x\mathcal{F})^\perp \cap T_x\mathcal{F}' \\ &= \dim(T_x\mathcal{F})^\perp + \dim T_x\mathcal{F}' - \dim < (T_x\mathcal{F})^\perp \cup T_x\mathcal{F}' > \\ &= \dim \mathcal{F}' - \dim \mathcal{F} \\ &= \text{co dim } \mathcal{F} - \text{co dim } \mathcal{F}' \end{aligned}$$

Soit ω la 1-*forme* de Fédida définissant \mathcal{F} , et soit ,en tout point x de \mathcal{M} ,
 ϖ_x l'isomorphisme canonique d'espaces vectoriels rendant commutatif le diagramme de projections

$$\begin{array}{ccc} T_x \mathcal{M} & \xrightarrow{\omega_x} & \mathcal{G} \\ \downarrow & \nearrow \varpi_x & \\ \nu_x(\mathcal{F}) & & \end{array}$$

et σ l'application de \mathcal{G} dans $l(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ dans qui à tout $\lambda \in \mathcal{G}$ associe $\sigma(\lambda)$ définie par $\sigma(\lambda)(x) = (\varpi_x \circ ev_x)^{-1}(\lambda)$; σ est un isomorphisme linéaire de \mathcal{G} sur $l(\mathcal{M}, \mathcal{F})$

On remarquera que pour tous $X, Y \in l(\mathcal{M}, \mathcal{F})$,

- 1) $\sigma^{-1}(X) = \omega(X)$,
- 2) $\omega(X)$ est une fonction constante sur \mathcal{M} et
- 3) $\omega[X, Y] = [\omega(X), \omega(Y)]$.

Il en résulte que σ est aussi un isomorphisme d'algèbres: c'est cet isomorphisme canonique qui permet d'identifier $\mathcal{G} = Lie(G)$ et l'algèbre de Lie structurale $l(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ de \mathcal{F} . Ici pour la clarté de la démonstration nous nous garderons de faire une telle identification.

Ceci étant, considérons le système différentiel \mathcal{P} défini sur \mathcal{M} par

$$\mathcal{P}(x) = T_x \mathcal{F} \oplus ev_x(\tilde{\mathcal{H}})$$

Soit $\mathcal{X}(\mathcal{P})$ et $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ les $\mathcal{A}^0(\mathcal{M})$ -modules des champs de vecteurs tangents respectivement à \mathcal{P} et à \mathcal{F} . On a

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = \mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus (\mathcal{A}^0(\mathcal{M}) \otimes \tilde{\mathcal{H}})$$

Comme les champs de vecteurs de $\tilde{\mathcal{H}}$ sont feuilletés pour \mathcal{F} , cette décomposition permet de voir que le module $\mathcal{X}(\mathcal{P})$ est stable par le crochet et que par suite \mathcal{P} est un système différentiable complètement intégrable qui définit \mathcal{F}' . Ainsi la sous-algèbre de Lie $\mathcal{H} = \sigma^{-1}(\tilde{\mathcal{H}})$ de \mathcal{G} et le sous-groupe de Lie connexe H dans G correspondant sont définis sans ambiguïté à partir de l'extension \mathcal{F}' .

Réciproquement la donnée d'un sous-groupe de Lie connexe H de G permet de définir sur \mathcal{M} un système différentiel \mathcal{P} par

$$\mathcal{P}(x) = T_x \mathcal{F} + ev_x(\sigma(Lie(H))) \text{ (cette somme est en fait directe).}$$

et le module de champs correspondant étant

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = \mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus (\mathcal{A}^0(\mathcal{M}) \otimes \sigma(Lie(H)))$$

et σ étant un isomorphisme d'algèbres, il est facile de voir que le système différentiel \mathcal{P} ainsi défini est complètement intégrable, et le feuilletage \mathcal{F}' qu'il définit est bien sûr une extension de \mathcal{F} puisque pour tout $x \in \mathcal{M}$, on a $T_x \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(x) = T_x \mathcal{F}'$.

Et la correspondance biunivoque est ainsi établie.

2. - Soit \mathcal{F}_H une extension de \mathcal{F} et \mathcal{H} la sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} correspondant à H , soit (e_1, \dots, e_q) une base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} telle que $(e_{q'+1}, \dots, e_q)$

engendre \mathcal{H} et $\omega = \sum_{i=1}^q \omega^i \otimes e_i$ la 1-forme de Fédida de \mathcal{F} . Puisque en tout point de \mathcal{M} les 1-formes scalaires $\omega^1, \dots, \omega^q$ sont linéairement indépendantes, alors les 1-formes $\omega^1, \dots, \omega^{q'}$ sont aussi linéairement indépendantes partout et la condition de Maurer-Cartan (*) assure que le système différentiel $\omega^1 = \dots = \omega^{q'} = 0$ est complètement intégrable et définit donc un feuilletage \mathcal{F}' de codimension q' qui n'est rien d'autre que le $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage défini par ω .

Par ailleurs, encore comme $\sigma^{-1}(X) = \omega(X)$ si $X \in \tilde{\mathcal{H}} = \sigma(\mathcal{H})$ alors pour tout $X \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\omega(X) \in \mathcal{H}$. Ce qui permet alors de voir que pour tout $k, 1 \leq k \leq q'$, et pour tout $X \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\omega^k(X) = 0$, i.e. X est tangent à \mathcal{F}' . Ce qui montre que pour tout $x \in M$, $T_x \mathcal{F}_H = T_x \mathcal{F} \oplus \text{ev}_x(\tilde{\mathcal{H}}) \subset T_x \mathcal{F}'$ et à cause d'égalité des dimensions, on a en fait $T_x \mathcal{F}_H = T_x \mathcal{F}'$; \mathcal{F}_H est bien le $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage associé à \mathcal{F} .

- Réciproquement si \mathcal{F}' est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage défini par ω et si \mathcal{D} est une développante de Fédida de \mathcal{F} définie sur le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{M}}$ de \mathcal{M} , et si $\widetilde{\mathcal{F}}$ et \mathcal{F}' sont les feuilletages relevés sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ respectifs de \mathcal{F} et \mathcal{F}' , alors l'application \mathcal{D} étant aussi une développante du $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage \mathcal{F}' , par la prop. 2.5, on a $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^* \mathcal{F}_{G, \mathcal{H}}$. Comme $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^* \mathcal{F}_{G, \{e\}}$ et $\mathcal{F}_{G, \{e\}} \subset \mathcal{F}_{G, \mathcal{H}}$, alors $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \widetilde{\mathcal{F}'}$ et \mathcal{F}' est une extension de \mathcal{F} .

Montrons maintenant que le feuilletage \mathcal{F}_H est riemannien. Pour cela, comme le problème est local, remarquons que:

(**) une extension \mathcal{F}' d'un feuilletage riemannien \mathcal{F} est un feuilletage riemannien si et seulement si la projection canonique de la restriction de \mathcal{F}' à tout ouvert à la fois distingué pour \mathcal{F} et \mathcal{F}' est un feuilletage riemannien de la variété quotient locale de \mathcal{F} .

Soit U un ouvert distingué à la fois pour \mathcal{F} et \mathcal{F}_H , π et π_h les projections sur les variétés quotient locales respectives V et V_h . Alors puisque \mathcal{F}_H est une extension de \mathcal{F} , il existe une submersion θ_h de V sur V_h rendant commutatif le diagramme de projections suivant:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\pi_h} & V_h \\ \pi \downarrow & \nearrow \theta_h & \\ V & & \end{array}$$

Ce diagramme montre que la projection sur V de la restriction de \mathcal{F}_H à U est un feuilletage simple $(V, \mathcal{F}_{\theta_h})$ puisque défini par la submersion θ_h . Ensuite le feuilletage \mathcal{F} étant un feuilletage de Lie minimal, on sait que son faisceau central transverse $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ est localement trivial et s'identifie aux germes définis par l'algèbre de Lie structurale $l(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ de \mathcal{F} (plus précisément par son algèbre de Lie opposée $l(\mathcal{M}, \mathcal{F})^-$ constituée par les champs de vecteurs invariants à droite). En supposant en plus que U est un ouvert trivialisant du faisceau, alors le "sous-faisceau" $\mathcal{C}_H(U, \mathcal{F}) = U \times \sigma(\mathcal{H})^-$ de $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ correspondant à la sous-algèbre de Lie $\sigma(\mathcal{H})$ de $l(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ définit, par ses orbites dans U , le feuilletage $\mathcal{F}_{H,U}$ restriction de \mathcal{F}_H à U . Ainsi on peut regarder les feuilles de $\mathcal{F}_{H,U}$ comme les orbites du "sous-faisceau" $\mathcal{C}_H(U, \mathcal{F})$, i.e. des orbites d'un faisceau de germes de champs de Killing transverses. Et le feuilletage \mathcal{F}_{θ_h} étant la projection de ces

orbites par π sur la variété quotient locale V est alors un feuilletage riemannien dont une métrique quasi-fibrée est la métrique projetée de la métrique transverse de \mathcal{F} . Et il suit, d'après la remarque (**), que le feuilletage \mathcal{F}_H est riemannien.

Ensuite, l'inclusion $T\mathcal{F} \subset T\mathcal{F}_H$ induit un morphisme canonique de fibrés vectoriels α de $\vartheta(\mathcal{F})$ sur $\vartheta(\mathcal{F}_H)$ de sorte que le fibré normal de \mathcal{F}_H est le fibré quotient du fibré normal de \mathcal{F} par son sous-fibré $\text{Ker}\alpha$. Comme $\vartheta(\mathcal{F})$ en tant que fibré normal d'un feuilletage de Lie est trivial ($\vartheta(\mathcal{F}) \cong M \times \mathcal{G}$) et comme $\text{Ker}\alpha$ est aussi trivial ($\text{Ker}\alpha \cong M \times \mathcal{H}$), alors $\vartheta(\mathcal{F}_H)$ est trivialisable et de section globale $(\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_{q'}))$. De façon précise $\vartheta(\mathcal{F}_H) \cong M \times \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}} \cong M \times \mathcal{H}^\perp$ et où $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$ et \mathcal{H}^\perp l'orthocomplément de \mathcal{H} dans l'espace euclidien $\mathcal{G} = T_e G$ muni de la base orthonormée (e_1, \dots, e_q) .

3 - Soit \mathcal{F}_H une extension d'un feuilletage de Lie minimal \mathcal{F} d'une variété compacte \mathcal{M} , H étant le sous-groupe de Lie connexe associé à cette extension. Soit (\mathcal{D}, ρ) un développement de Fédida de \mathcal{F} sur le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{M}}$ de \mathcal{M} . Puisque le feuilletage \mathcal{F}_H est aussi un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage, notons $\widetilde{\mathcal{F}}_H$ le relèvement de \mathcal{F}_H sur $\widetilde{\mathcal{M}}$; \mathcal{F}_H est alors de même développante que le feuilletage de Lie \mathcal{F} .

a) En gardant les notations de la prop. 2.5, il est clair que si le sous-groupe H est fermé, le feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ i.e. le feuilletage de G par les translatés de H , est défini par la submersion canonique $\theta : G \longrightarrow \frac{G}{H}$, et comme d'après la prop. 2.5, $\widetilde{\mathcal{F}}_H = \mathcal{D}^* \mathcal{F}_{G,H}$, il vient que $\mathcal{D}_H = \theta \circ \mathcal{D} : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \frac{G}{H}$ est une submersion définissant $\widetilde{\mathcal{F}}_H$, équivariante pour la représentation $\rho : \pi_1(\widetilde{\mathcal{M}}) \longrightarrow G$ associée au feuilletage de Lie \mathcal{F} ; par suite cette extension est un feuilletage transversalement homogène.

b) Réciproquement si \mathcal{F}_H est une extension de \mathcal{F} transversalement homogène de variété transverse une variété homogène T , comme $\widetilde{\mathcal{F}}_H$ est une extension de $\widetilde{\mathcal{F}}$ et que ces deux feuilletages sont simples ([1], [6]), alors il existe une submersion θ de G sur T telle que la submersion $\mathcal{D}' = \theta \circ \mathcal{D}$ définit $\widetilde{\mathcal{F}}_H$. Si \mathcal{F}_θ est le feuilletage simple donnée par la submersion θ , il est clair que

$$\mathcal{D}^* \mathcal{F}_{G,H} = \widetilde{\mathcal{F}}_H = \mathcal{D}^* \mathcal{F}_\theta$$

Puisque \mathcal{D} est une submersion surjective on a évidemment

$$\mathcal{F}_{G,H} = \mathcal{D} \mathcal{D}^* \mathcal{F}_{G,H} = \mathcal{D} \mathcal{D}^* \mathcal{F}_\theta = \mathcal{F}_\theta,$$

et il en résulte que le sous-groupe H est la composante connexe de la fibre $\theta^{-1}(\theta(e))$ qui contient l'élément neutre e de G . Comme cette fibre est une fermée dans G , alors H est aussi une partie fermée de G .

Ce qui précède en a) assure que cette extension \mathcal{F}_H est un $\frac{G}{H}$ -feuilletage transversalement homogène dont ρ serait une représentation.

En plus, si le sous-groupe H est normal dans G , alors le feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$, i.e. le feuilletage de G par les translatés de H est un $\frac{G}{H}$ -feuilletage de Lie. Comme le groupe de Lie G est pris connexe et simplement connexe, alors ce feuilletage est nécessairement un feuilletage simple [6]; par suite le sous-groupe H étant la feuille passant par l'élément neutre est fermée et le feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ défini par

la projection canonique $\theta : G \longrightarrow \frac{G}{H}$. Ensuite puisque θ est un mophisme de groupes, alors le feuilletage extension \mathcal{F}_H de \mathcal{F} est un feuilletage de Lie car son feuilletage relevé $\widehat{\mathcal{F}}_H$ sur $\widehat{\mathcal{M}}$ est défini par la submersion $\theta \circ \mathcal{D}$ équivariante pour la représentation $\rho' = \theta \circ \rho : \pi_1(\mathcal{M}) \longrightarrow \frac{G}{H}$.

Réciproquement si l'extension \mathcal{F}_H est un feuilletage de Lie et si $\mathcal{D} : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow G$ et $\mathcal{D}_H : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow G'$ sont des développantes de Fédida respectives pour \mathcal{F} et \mathcal{F}_H , alors, on montre comme dans [4], que si Γ est le groupe d'holonomie du feuilletage de Lie \mathcal{F} , il existe une submersion θ de G sur G' telle que

1)

$$\mathcal{D}_H = \theta \circ \mathcal{D}$$

2) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\theta} & G \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \theta(\gamma) \\ G & \xrightarrow{\theta} & G \end{array}$$

i.e. pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $g \in G$,

$$\theta(\gamma \cdot g) = \theta(\gamma) \cdot \theta(g)$$

Comme Γ est dense dans G et que la restriction de θ à Γ est un homomorphisme de groupes qui est continu, alors par continuité, θ est évidemment un morphisme de groupes. Dans ces conditions, \mathcal{F}_H est aussi une extension de Lie de \mathcal{F} correspondant au sous-groupe K composante connexe de l'élément neutre du sous-groupe normal $\text{Ker}\theta$ de G . En raison de la correspondance biunivoque entre extensions et sous-groupes de Lie connexes, on a nécessairement $H = K$ et le sous-groupe H est alors normal. ■

Remarque 3.3

1- Il découle de cette dernière caractérisation que *toute extension de Lie d'un feuilletage homogène minimal d'une variété compacte [7] est également un feuilletage homogène.*

2- L'hypothèse que *le feuilletage de Lie \mathcal{F} est minimal est essentielle* comme le montre l'exemple 2.7.

En gardant les notations de la preuve du théorème précédent, considérons pour un G -feuilletage de Lie minimal $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ d'une variété compacte et connexe, la 1-forme ϖ_H sur \mathcal{M} à valeurs dans \mathcal{G} définie par $\varpi_H = \alpha \circ \omega$, où α est la projection canonique de $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$ sur \mathcal{H}^\perp . On vérifie que ϖ_H est une équation de \mathcal{F}_H . On peut associer à cette 1-forme une 2-forme de courbure $\Omega_H = d\omega_H + \frac{1}{2}[\omega_H, \omega_H]$ définie sur \mathcal{M} à valeurs dans \mathcal{G} , où $\omega_H = j \circ \varpi_H$, j étant l'injection canonique de \mathcal{H}^\perp dans \mathcal{G} .

En partant de la formule classique,

$$\Omega_H(X, Y) = X\omega_H(Y) - Y\omega_H(X) - \omega_H[X, Y] + [\omega_H(X), \omega_H(Y)],$$

et en remarquant que, pour tout $X \in l(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, $\omega_H(X)$ est une fonction constante, alors un calcul facile permet de voir que:

- 1) $\Omega_H(X, Y) = 0$ si X et Y sont tangents à \mathcal{F}' ,
- 2) $\Omega_H(X, Y) = -\alpha\sigma^{-1}[X, Y]$ si $X \in \sigma(\mathcal{H}) = \tilde{\mathcal{H}}$ et $Y \in \sigma(\mathcal{H}^\perp)$
- 3) $\Omega_H(X, Y) = (1 - \alpha)\sigma^{-1}[X, Y]$ si $X \in \sigma(\mathcal{H}^\perp)$ et $Y \in \sigma(\mathcal{H}^\perp)$

La 2-*forme* de courbure Ω_H étant une application $\mathcal{A}^0(\mathcal{M})$ - bilinéaire de $\mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M})$ dans \mathcal{G} , les relations précédentes déterminent parfaitement la 2-*forme* Ω_H .

En partant de cette 1-*forme* ω_H , on obtient les caractérisations suivantes d'une extension de Lie d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte.

Corollaire 3.4 *Si \mathcal{F}_H est une extension d'un G-feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte connexe, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. \mathcal{F}_H est une extension de Lie
2. H est un sous-groupe normal
3. ω_H est basique pour \mathcal{F}_H
4. $\Omega_H = d\omega_H + \frac{1}{2}[\omega_H, \omega_H]$ est basique pour \mathcal{F}_H
5. $\Omega_H = 0$.

On notera que lorsque l'extension \mathcal{F}_H est de Lie, la 1-*forme* ω_H explicitée ci-dessus est sa 1-*forme* de Fédida [6].

Corollaire 3.5 *Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ un G-feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte connexe.*

Si le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{M})$ est virtuellement résoluble (resp. abélien) toute extension de \mathcal{F} est transversalement homogène (resp. de Lie).

En particulier:

- 1) *toute extension d'un feuilletage linéaire minimal du tore est également linéaire,*
- 2) *toute extension d'un flot riemannien minimal d'une variété compacte est conjuguée à un feuilletage linéaire du tore.*

Preuve. En considérant sur \mathcal{M} une métrique quasi-fibrée quelconque pour \mathcal{F} , cette métrique étant complète et $\pi_1(\mathcal{M})$ virtuellement résoluble, et comme par ailleurs toute extension de \mathcal{F} est un feuilletage riemannien minimal (théo.3.2) alors d'après le théo.2.8 cette extension est aussi un feuilletage transversalement homogène.

Si en plus $\pi_1(\mathcal{M})$ est abélien, alors le groupe d'holonomie de \mathcal{F} étant abélien et dense dans G , il vient par continuité de la loi de groupe, que le groupe de Lie G est abélien et par suite toute extension de \mathcal{F} est de Lie.

Pour le reste cela tient de la partie 1) de la remarque 3.3 et du résultat de Yves Carrière sur les flots riemanniens minimaux [3]. ■

Ensuite, en rappelant qu'un feuilletage \mathcal{F} est dit *dense* dans un autre feuilletage \mathcal{F}' si toute feuille de \mathcal{F} est dense dans la feuille de \mathcal{F}' qui la contient, on a :

Corollaire 3.6 1) Si une variété compacte à groupe fondamental virtuellement résoluble supporte un G –feuilletage de Lie minimal, alors tout sous-groupe de Lie connexe de G est fermé; et toute extension de ce feuilletage est transversalement homogène.

2) Si un flot riemannien (M, \mathcal{F}) d’une variété compacte est dense dans une de ses extensions \mathcal{F}' alors la restriction de \mathcal{F}' à l’adhérence de l’une quelconque de ses feuilles et conjuguée à un feuilletage linéaire.

Preuve. 1) En effet au sous-groupe de Lie H de G , il correspond d’après le

théo.3.2 une extension de ce G –feuilletage de Lie minimal qui par le théorème Haefliger sus-cité est un feuilletage transversalement homogène ; ce qui , d’après le théo.3.2 encore implique que H est fermé.

2) Ceci résulte immédiatement de [3] et du corollaire 3.5 précédent. ■

Par analogie au théorème de Molino sur les feuilletages transversalement parallélisables [9], le théo 3.2 permet de dire en

Conclusion 3.7 Si \mathcal{F}' est une extension d’un feuilletage transversalement parallélisable \mathcal{F} d’une variété compacte connexe, telle que \mathcal{F} est dense dans \mathcal{F}' alors:

1 - les adhérences des feuilles de \mathcal{F}' forment une fibration localement triviale égale à la fibration basique de \mathcal{F} ,

2 - les feuilles de \mathcal{F}' sont les orbites d’un sous-faisceau du faisceau transverse central de \mathcal{F} , de fibre-type une sous-algèbre de Lie opposée à une sous-algèbre de l’algèbre de Lie structurale de \mathcal{F} ,

3 - le feuilletage \mathcal{F}' est transversalement riemannien et à fibré normal trivial,

4 - la restriction de \mathcal{F}' à l’adhérence d’une feuille est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ –feuilletage associé au \mathcal{G} – feuilletage de Lie défini par \mathcal{F} dans cette restriction.

References

- [1] **R. A. Blumenthal, 1979.** Transversely homogenous foliations. Ann. Inst. Fourier. 29, 4, 143-158.
- [2] **B.Bossoto and H.Diallo, 2002.** Sur les drapeaux de feuilletages Riemanniens, JP Journal of Geometry and Topology, 2, 3, 281-288.
- [3] **Y.Carrière,1984** . Flots Riemanniens, in " Structures transverses des feuilletages, Astérisque, 116 31-52.
- [4] **H.Diallo, 2002** .Sur les drapeaux de Lie.Afrika Mathematika,3, 13 ,75-86.
- [5] **A. El Kacimi Alaoui , G, Guasp, and M.Nicolau,1999.** On deformation of transversely homogenous foliations. Prépublication. UAB., 4.
- [6] **E.Fédida, 1974** .Sur l'existence des Feuilletages de Lie. CRAS de Paris, 278, 835-837.
- [7] **E. Ghys, 1984.** Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes, Anna . Inst. Fourier , Grenoble, 34, 4, 203-223.
- [8] **A. Haefliger, 1984.** Groupoïdes d'holonomie et classifiants. Astérisque, 116, 98- 107.
- [9] **P.Molino, 1988.** Riemannian foliations. Birkhäuser.